MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Gabriela Streinu-Cercel Gabriela Constantinescu Gabriela Oprea Boris Singer

Gheorghe Stoianovici Costel Chiteș Ioan Marinescu Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M2

• Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

• Filiera tehnologică, toate calificările profesionale

SIGMA

București, 2022

CUPRINS

2. Operații cu matrice: înmulțirea

Înmulțirea matricelor

Exercițiu rezolvat.

Pentru fabricarea produselor X și Y o întreprindere utilizează piesele P_1, P_2, P_3. Tabelul alăturat reprezintă necesarul pentru fabricație; astfel, pentru fabricarea unei unități din produsul X sunt necesare 5 bucăți P_1, 2 bucăți P_2, 1 bucată P_3. Asociem acestui tabel matricea $A=\begin{pmatrix}5&2&1\\2&3&2\end{pmatrix}$.

	P_1	P_2	P_3
X	5	2	1
Y	2	3	2

Tabelul alăturat reprezintă pentru fiecare piesă de tipul P_1, P_2, respectiv P_3, în unități monetare, costul de producție și costul de transport. Asociem acestui tabel matricea $B=\begin{pmatrix}10&1\\5&3\\1&2\end{pmatrix}$.

	cost producție	cost transport
P_1	10	1
P_2	5	3
P_3	1	2

Pentru fabricarea unei unități din X, costul total de producție al pieselor este $5\cdot 10+2\cdot 5+1\cdot 1=61$, iar costul total de transport este $5\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 2=13$.

Calculează în mod analog costurile pentru fabricarea unei unități din Y.

Putem aranja calculele astfel: $\begin{pmatrix}5&2&1\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&1\\5&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot10+2\cdot5+1\cdot1 & 5\cdot1+2\cdot3+1\cdot2\\2\cdot10+3\cdot5+2\cdot1 & 2\cdot1+3\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}61&13\\37&15\end{pmatrix}$

și obținem repartiția costului de producție și a costului de transport pentru fiecare articol.

Acest exemplu ne conduce la următoarea ...

Definiție.

Fie $m,\ n,\ p\in\mathbb{N}^*, A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ și $B=(b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le p}}$. *Produsul matricelor* A *și* B (în această ordine) este matricea

$$C=(c_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le p}},\ \text{unde}\ \forall\, i\in\{1,...,m\},\ \forall\, k\in\{1,\ldots,p\},\ c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}\cdot b_{nk}.$$

Matricea produs C se notează $A\cdot B$.

Să explicităm modul în care se înmulțesc două matrice.

Fie $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\ldots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\ldots&b_{2p}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\b_{n1}&b_{n2}&\ldots&b_{np}\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\ldots&c_{1p}\\c_{21}&c_{22}&\ldots&c_{2p}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\c_{m1}&c_{m2}&\ldots&c_{mp}\end{pmatrix}$, unde $C=A\cdot B$.

Elementele din prima linie a matricei C sunt:

$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1}$ (produsul dintre linia 1 din A și coloana 1 din B),

$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1n}b_{n2}$ (produsul dintre linia 1 a matricei A și coloana 2 a matricei B),

...

$c_{1p}=a_{11}b_{1p}+a_{12}\cdot b_{2p}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{np}$ (produsul dintre linia 1 a matricei A și coloana p a matricei B).

Elementele liniei a doua din C se obțin înmulțind linia 2 din A, pe rând, cu coloanele matricei B, adică:

$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2n}b_{n1}$, $c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2n}b_{n2}$, . . . , $c_{2p}=a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+\ldots+a_{2n}b_{np}$.

În general, elementele din linia i a matricei C se obțin înmulțind, pe rând, linia i din A cu coloanele lui B.

Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$,

$$AB=\begin{pmatrix}-1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1 & -1\cdot7+2\cdot0+3\cdot2 & -1\cdot(-1)+2\cdot4+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot(-2)+3\cdot(-1)\\ 4\cdot2+(-2)\cdot3+1\cdot1 & 4\cdot7+(-2)\cdot0+1\cdot2 & 4\cdot(-1)+(-2)\cdot4+1\cdot0 & 4\cdot0+(-2)\cdot(-2)+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1 & 9 & -7\\ 3 & 30 & -12 & 3\end{pmatrix}$$

Matricea A poate fi înmulțită cu matricea B numai dacă numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B.

Precizăm că produsul vectorilor (sau matricelor) cu un scalar este un vector (respectiv o matrice).

Teoremă. *Proprietățile înmulțirii matricelor*

1. Oricare ar fi matricele $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$:

$\boxed{(AB)C=A(BC)}$ (*asociativitatea*)

2. Oricare ar fi matricele A de tip (m, n), B și C de tip (n, p):

$\boxed{A(B+C)=AB+AC}$

(*distributivitatea înmulțirii la stânga față de adunare*).

3. Oricare ar fi matricele A, B de tip (m, n), C de tip (n, p):

$\boxed{(A+B)C=AC+BC}$

(*distributivitatea înmulțirii la dreapta față de adunare*).

4. *Matricea unitate de ordinul n*, $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$

este *element neutru față de înmulțire*, adică $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avem

$\boxed{A\cdot I_n=I_n\cdot A=A}$

Atenție! În general $A\cdot B\neq B\cdot A$. Dacă $A\cdot B=B\cdot A$, spunem că matricele A și B comută între ele.

Observație.

- Considerăm sistemul de ecuații liniare:

$(S)\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$. Fie A matricea sistemului, X matricea necunoscutelor și B matricea termenilor liberi:

Cum înmulțim matricele?

1) Verifică înmulțirea matricelor următoare:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot(-1) & 1\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot0\\ 0\cdot0+1\cdot(-1) & 0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot2+1\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2) Fie $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Verifică egalitatea $A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 13\\ -7 & -10\end{pmatrix}$.

3) Înmulțește matricea linie $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$ cu matricea coloană $\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 4\\ -3\end{pmatrix}$.

4) Înmulțește matricea linie $\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ cu matricea coloană $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

5) Știind că $A\cdot\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 12\\ 7\\ 8\end{pmatrix}$, află tipul matricei A și dă un exemplu de matrice A.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ și } B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Obținem scrierea matricială a sistemului (S): $AX = B$.

EXEMPLU

1) Scrie matricial sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ -x+y=0 \end{cases}.$$

Soluție. Scrierea matricială a sistemului este $AX = B$, unde

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Verifică rezolvarea ecuației matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluție.

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Numărul de linii ale lui X este 3, egal cu numărul de coloane ale lui A, iar numărul de coloane ale lui X este 2, egal cu numărul de coloane ale lui B.

Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix},\ A\cdot X=\begin{pmatrix} a-e & b-f \\ a-c+2e & b-d+2f \end{pmatrix}$.

Din $A\cdot X = B$, rezultă $\begin{cases} a-e=-1 \\ b-f=3 \\ a-c+2e=6 \\ b-d+2f=0 \end{cases}$. Soluțiile sunt:

$a=\alpha-1;\ b=\beta+3;\ c=3\alpha-7;\ d=3\beta+3;\ e=\alpha;\ f=\beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Deci, problema are o infinitate de soluții de forma

$$X=\begin{pmatrix} \alpha-1 & \beta+3 \\ 3\alpha-7 & 3\beta+3 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Caz particular: $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Rezultă $X=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Verificare: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Calculează, dacă este posibil, produsul matricelor $A \cdot B$:

a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7) Verifică dacă $A \cdot B \neq B \cdot A$, pentru

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

8) Verifică dacă $AB = BA$, pentru

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9) Verifică proprietățile înmulțirii matricelor pentru $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Determină matricele X care au proprietatea: $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot X$.

11) Fie matricele:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuațiile matriciale:

a) $AX = I_2$; b) $AX = B$.

12) Fie matricele:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ și } B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuațiile matriciale:

a) $AX = XB$; b) $AXA = B$.

13) Determină matricea X dacă:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14) Determină matricea X dacă:

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ridicarea la putere a matricelor pătratice

Definiție.

Pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, definim $A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Convenție.

Pentru $A \neq O_n$, $A^0 = I_n$ (matricea unitate cu n linii și n coloane).

Observăm că $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$, ..., $A^{k+1} = A^k \cdot A$.

Proprietăți.

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice care comută între ele: $AB = BA$. Relațiile următoare se demonstrează în mod asemănător cu relațiile corespunzătoare la numere:

a) $A^iB^k = B^kA^i, \forall i, k \in \mathbb{N}^*$;

b) $A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2} \cdot B + \ldots + A \cdot B^{k-2} + B^{k-1}), \forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$;

c) $A^k + B^k = (A+B)(A^{k-1} - A^{k-2} \cdot B + \ldots - A \cdot B^{k-2} + B^{k-1}), \forall k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$, k impar;

d) $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^{k-i} B^i, \forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$. (*binomul lui Newton*).

EXEMPLU

Calculează A^n, pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Metoda I.

Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3a+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observăm elementul de pe linia 1, coloana 3. Presupunem și demonstrăm prin inducție că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & a_k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a_k \in \mathbb{R}$.

Avem $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & a+k+a_k \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & a_{k+1} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

unde $a_{k+1} = a_k + k + a, \forall k \geqslant 1$.

Din această relație de recurență deducem:

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a_1 + 1 + a \\ a_3 &= a_2 + 2 + a \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k &= a_{k-1} + (k-1) + a. \end{aligned}$$

$$a_k = a + (1 + 2 + \ldots + (k-1)) + (k-1)a = ka + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Cum ridicăm o matrice la o putere?

15) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculează:

a) $A^2 = A \cdot A$;

b) A^3.

16) Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculează:

a) AB și BA;

b) $A^2 - B^2$ și $(A-B)(A+B)$.

Ce constați?

c) $A^3 - B^3$ și $(A-B)(A^2 + AB + B^2)$.

Ce observi?

17) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arată că $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu A la înmulțire este de forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

b) Calculează A^2 și X^2.

c) Calculează A^3 și X^3.

18) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determină X de forma $X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, astfel încât $X^2A = B$.

19) $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Arată că:

i) $A^2 = -a^2I_2$;

ii) $A^3 = -a^2A$;

iii) $A^4 = a^4I_2$.

b) Calculează: A^5, A^6, A^7, A^8.

Așadar $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & na+\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Metoda a II-a. (Metoda binomului lui Newton)

Scriem matricea A sub forma $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=I_3+B$.

Cum $I_3 \cdot B = B \cdot I_3$, aplicăm formula binomului lui Newton: $A^n=(I_3+B)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k$. Calculăm inductiv puterile lui B:

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3=O_3$ și deci $B^k=O_3$, $\forall\, k \geqslant 3$.

Atunci: $A^n=C_n^0B^0+C_n^1B+C_n^2B^2=$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & n & na \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n & na+\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercițiu rezolvat.

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să calculăm A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Calculăm:

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Vom demonstra prin metoda inducției matematice că

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \geqslant 1$.

Presupunem că $A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ și demonstrăm că $A^{k+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$, deci A^{k+1} este de forma de mai sus. Atunci $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

20) Calculează A^2, A^3, A^4, unde A este matricea:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & d & a \end{pmatrix}$.

21) Calculează A^2, A^3 pentru:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\dfrac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ce poți spune despre A^n, $n \in \mathbb{N}^*$?

22) Calculează A^2, A^3, A^4 pentru:

$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Ce poți spune despre A^n, $n \in \mathbb{N}^*$?

23) Calculează $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{2001}$.

24) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculează A^2, A^3, A^4.

b) Calculează A^n, $n \geqslant 1$.

25) Determină $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încât $X^2-7X+3I_2=O_2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

a) Arată că ${}^t(A\cdot B)={}^tB\cdot{}^tA$.

b) Arată că între o matrice X de tip (m, n) și o matrice Y de tip (n, m) are loc relația: ${}^t(X\cdot Y)={}^tY\cdot{}^tX$.

2. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Calculează: AB, BA, $AB-BA$, $A^2=A\cdot A$, B^2, A^2-B^2.

3. Fie $X(a)=\begin{pmatrix}1+5a & 10a\\ -2a & 1-4a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arată că:

a) $\forall\ a, b\in\mathbb{R}$, $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$;

b) $(X(2))^2=X(8)$.

4. Determină matricea X care verifică ecuația

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 12 & -6 & -9\end{pmatrix}.$$

5. Găsește toate matricele cu elemente în mulțimea $\{0, 1\}$ care transformă prin înmulțire matricea $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ în matricea $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$.

6. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și mulțimea $\mathcal{M}=\{C(x)=xA+B,\ x\in\mathbb{R}^*\}$. Arată că:

a) $C(x)\cdot C(y)=C(y)\cdot C(x)$, $\forall\ C(x), C(y)\in\mathcal{M}$;

b) $I_2\in\mathcal{M}$.

7. Arată că $\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{12}=2^{12}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

8. Calculează A^2, A^3, A^4, unde A este matricea:

a) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}2 & 2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 2\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & 2\\ -2 & 2\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

9. a) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Determină toate matricele X astfel încât $A^2\cdot X=X\cdot A^2$ și arată că nu există nici o matrice Y astfel încât $A^2\cdot Y-Y\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

b) Arată că, oricare ar fi $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB-BA\neq I_n$.

10. Determină matricea X dacă:

a) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

11. Rezolvă ecuația matricială:

$$X-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

12. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $a \neq d$, $b \neq c$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Fie $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrează că $\dfrac{b_n}{b}=\dfrac{c_n}{c}=\dfrac{a_n-d_n}{a-d}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

13. Fie $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Arată că:

a) $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_3$, $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$;

b) $A^n=\dfrac{2^n}{3}\cdot(A+I_3)+\dfrac{(-1)^n}{3}\cdot(2I_3-A)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

14. Calculează:

a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^n$; b) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}^n$;

c) $\begin{pmatrix}7 & 0 & 7\\ 0 & 14 & 0\\ 7 & 0 & 7\end{pmatrix}^n$;

d) $\begin{pmatrix}7 & 2 & 7\\ 1 & 14 & 1\\ 7 & 2 & 7\end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Determină $\sum\limits_{k=1}^{n} A^k$, $n\in\mathbb{N}^*$.

16. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Arată că:

a) A verifică ecuația $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$;

b) $ad = bc$ implică:

$\exists\, r \in \mathbb{N}^*$ cu $A^k = r^{k-1}\cdot A$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

17. Dacă $\begin{pmatrix}a-b & a\\ a+b & a+2b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, arată că $y-x$, $z-y$, $t-z$ sunt în progresie aritmetică.

18. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a+b & 0 & a\\ 0 & b & 0\\ a & 0 & a+b\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}^*$. Calculează A^2, A^3, A^4.

19. Determină $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația:
a) $X^2={}^tX$; b) $X^2=I_2$; c) $X\cdot{}^tX=O_2$.

20. Fie $X(a)=\begin{pmatrix}1+5a & 10a\\ -2a & 1-4a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arată că $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $X(a)\cdot X(b) = X(a+b+ab)$.

b) Determină $(X(1))^2$.

c) Arată că $(X(1))^n = X(2^n-1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

21. Calculează:

a) $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{2001}$;

b) $\begin{pmatrix}6 & 5\\ -3 & -2\end{pmatrix}^{2008}$;

c) $\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

22. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ și

$\mathcal{N}(A)=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\mid XA=AX\}$. Arată că:

a) dacă $X, Y \in \mathcal{N}(A)$, atunci $XY \in \mathcal{N}(A)$;

b) dacă $X \in \mathcal{N}(A)$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0 & 3b\\ 0 & c & 0\\ b & 0 & a\end{pmatrix}$;

c) dacă $X \in \mathcal{N}(A)$ și $X^2 = O_3$, atunci $X = O_3$;

d) dacă $X \in \mathcal{N}(A)$ și $X^{2007} = O_3$, atunci $X = O_3$.

3. Sisteme de ecuații liniare. Determinanți

SĂ NE AMINTIM

O *ecuație liniară* cu n necunoscute, $x_1, x_2, ..., x_n$ este o ecuație de forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b_1$, unde $a_1, a_2, ..., a_n, b_1 \in \mathbb{R}$.

Exemple de probleme care se pot rezolva printr-o ecuație liniară cu o necunoscută:

1) Într-un cuptor Siemens-Martin se topesc 20t de oțel, având un conținut de 0,5% carbon, cu 5t de fontă având un conținut de 5% carbon. Ce procent de carbon are amestecul?

Soluție.

Fie x% conținutul de carbon al amestecului, adică 25t de amestec conțin $\frac{25x}{100}$t carbon. Cele 20t de oțel conțin $\frac{20\cdot 0{,}5}{100}$t carbon și cele 5t de fontă conțin $\frac{5\cdot 5}{100}$t carbon. Atunci

$$\frac{20\cdot 0{,}5}{100}+\frac{5\cdot 5}{100}=\frac{25x}{100},\text{ cu } x = 1{,}4.$$

2) Un tren lung de 250 m trece cu viteza de 50 km/h printr-un tunel lung de 200 m. Cât a durat trecerea prin tunel?

Soluție.

Timpul de la intrarea locomotivei în tunel până la ieșirea ultimului vagon este de x secunde. În acest timp, ultimul vagon parcurge $\frac{50000}{60\cdot 60}x$ m, adică lungimea trenului plus lungimea tunelului: $200+250=\frac{50000}{60\cdot 60}x$, de unde $x = 32{,}4$ s.

SĂ NE AMINTIM

Forma generală a unui *sistem de ecuații liniare sau sistem liniar* este:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

unde $x_1, x_2, ... x_n$ sunt *necunoscutele sistemului*, numerele reale (sau complexe) a_{ij} $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ sunt *coeficienții necunoscutelor* și $b_1, b_2, ... b_m$ sunt *termenii liberi ai sistemului*.

Să rezolvăm probleme folosind ecuații liniare:

1) Două trenuri, primul lung de 150 m, iar al doilea de 250 m, trec în sens contrar unul pe lângă altul, primul cu viteza de 70 km/h, iar cel de-al doilea cu viteza de 50 km/h.

În cât timp trec unul pe lângă altul?

2) Aceeași problemă, dacă cele două trenuri circulă în același sens.

3) Află ce distanță parcurge pe șosea un automobil cu lungimea de 5 m care circulă cu viteza de 90 km/h, în timp ce depășește un camion care circulă cu viteza de 16 km/h având lungimea de 13 m.

4) Un șlep mergând în sensul curentului apei ajunge la destinație în 2 ore. Mergând contra curentului, cu aceeași încărcare a mașinilor, parcurge aceeași distanță în 3 ore. Viteza șlepului în apă stătătoare este de 250 m/min. Care este viteza curentului?

Să recunoaștem matricea asociată unui sistem liniar:

5) Scrie matricea sistemului și matricea extinsă pentru fiecare din următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$;

Unui sistem liniar îi asociem următoarele *matrice:*

$$\underset{\text{matricea sistemului}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{matricea extinsă a sistemului}}{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}, \quad \underset{\text{matricea termenilor liberi}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{matricea necunoscutelor}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}.$$

Matricea extinsă se mai numește și *matrice completă.*

Prin rezolvarea sistemului S înțelegem determinarea mulțimii soluțiilor $(x_1, x_2, ..., x_n)$ care verifică toate ecuațiile sistemului (S).

EXEMPLU

... de problemă care conduce la sistem liniar de 2 ecuații cu 2 necunoscute:

Un rezervor poate fi umplut cu apă de la un robinet de apă caldă și unul de apă rece. Dacă robinetul de apă caldă este deschis 3 minute și cel de apă rece 1 minut, atunci în rezervor vor fi 50 *l*. Dacă apa caldă curge un minut și apa rece 2 minute, atunci în rezervor vor fi 40 *l*. Câți litri de apă curg într-un minut din fiecare robinet?

Soluție.

Fie x *l*/min debitul robinetului de apă caldă și y *l*/min debitul celui de apă rece. Obținem sistemul $\begin{cases} 3x + y = 50 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$, cu soluția $(x, y) = (12, 14)$; deci robinetul de apă caldă furnizează 12 *l*/min și cel de apă rece 14 *l*/min.

♦ Sistemul $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ se poate rezolva prin mai multe metode. Să-l rezolvăm prin metoda reducerii.

Metoda reducerii constă în eliminarea uneia dintre necunoscute, adunând cele două ecuații înmulțite cu coeficienți corespunzători:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \mid \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \mid \cdot (-a_{12}) \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases}.$$

$$\overline{x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{22}b_1 - a_{12}b_2}$$

Pentru $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, obținem soluțiile:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

d) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 2x - 8y = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2y - 3z = 4 \\ 3z - 4t = 5 \\ x + 3y + 5z - 6t = 11 \end{cases}$.

Să rezolvăm probleme folosind sisteme de ecuații liniare.

6) Pentru a evita înghețarea apei în blocul motor și în sistemul de răcire al unui automobil se amestecă apa cu lichidul antigel cu densitatea 1,135 g/cm^3. Dacă lichidul ajunge la densitatea de 1,027 g/cm^3, atunci se evită înghețul până la temperatura de $-10°C$.

Câți litri de antigel și câți litri de apă sunt necesari la această temperatură pentru a obține 100 *l* de amestec?

Să rezolvăm sisteme liniare:

7) Rezolvă sistemul $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$:

a) prin metoda reducerii;
b) prin metoda substituției.

8) Rezolvă sistemul $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$:

a) prin metoda reducerii;
b) prin metoda substituției;
c) grafic (pe hârtie milimetrică).

9) Rezolvă sistemele următoare prin mai multe metode:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Observăm că la numitor se află o expresie pe care o notăm cu $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, care conține termenii $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$.

Definiție.

Determinantul unei matrice de ordinul al doilea,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, este numărul $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Fiecare dintre termenii determinantului Δ, $a_{11}a_{22}$ și $a_{12}a_{21}$, sunt obținuți înmulțind câte un singur element de pe fiecare linie și câte unul singur de pe fiecare coloană din matricea A.

Observație.

Valoarea determinantului matricei asociate unui sistem determină compatibilitatea sistemului (existența soluțiilor):

• dacă $\Delta \neq 0$, atunci sistemul este *compatibil determinat* (are soluție unică);

• dacă $\Delta = 0$, atunci sistemul este *incompatibil* (nu are soluții) sau *compatibil nedeterminat* (are o infinitate de soluții).

♦ *Metoda lui Cramer*

Sistemul de două ecuații liniare cu 2 necunoscute

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, are soluția: $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Observăm că la numitor avem determinantul matricei sistemului, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, iar la numărător avem determinanții $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ și $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienților necunoscutei cu coloana termenilor liberi.

Notăm $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$ și $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Metoda lui Cramer.

Soluția sistemului liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ este, pentru $\Delta \neq 0$,

$x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$ și $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$.

Exercițiu rezolvat.

Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$.

• *Metoda reducerii.*

Adunăm cele două ecuații și obținem $x = 1$.

Înlocuind această valoare într-una din ecuații, de exemplu în prima, obținem $y = 2$. Soluția sistemului este $(1, 2)$.

Observăm că:

a) cele două ecuații au coeficienții proporționali: dacă înmulțim prima ecuație cu 3 obținem a doua ecuație; în acest caz, spunem că sistemul este compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții); mulțimea soluțiilor sistemului este:

$S = \{(x, y) \mid y = 4 - 2x,\ x, y \in \mathbb{R}\} =$
$= \{(x, 4 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;

b) expresia $2x + y$ nu poate lua două valori diferite pentru aceeași pereche de numere (x, y); ca urmare, mulțimea soluțiilor sistemului (S) este mulțime vidă deci sistemul este incompatibil (nu are soluții).

10) Calculează valorile următorilor determinanți de ordinul al doilea:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & b \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

11) Pentru ce valori reale ale parametrului m, sistemul liniar $\begin{cases} (m+1)x + 8y = 4m \\ mx + (m+3)y = 3m - 1 \end{cases}$ are o infinitate de soluții?

Indicație.

Din condiția ca determinantul matricei asociate sistemului să fie 0, rezultă $m = 1$ sau $m = 3$. Pentru $m = 3$, înlocuind în sistem obținem un sistem incompatibil, iar pentru $m = 1$ obținem un sistem compatibil nedeterminat. În concluzie, sistemul are o infinitate de soluții pentru $m = 1$.

12) Pentru ce valori reale ale parametrului m, sistemul liniar $\begin{cases} (m-1)x + 8y = 4m \\ mx + (m+3)y = 3m + 1 \end{cases}$:

a) are soluție unică?

b) nu are soluții?

13) Fie sistemul $\begin{cases} 3x_1 - 17x_2 = 9 \\ 5x_1 + 19x_2 = 23 \end{cases}$.

a) Calculează Δ.

b) Calculează Δ_{x_1}, Δ_{x_2}.

c) Rezolvă sistemul prin metoda lui Cramer.